Feuille de TD 11 - Primitives et intégrales

Questions du cours.

(a) Donner la définition de primitive d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, avec I intervalle de $\mathbb{R}$.
(b) Donner la définition de intégrale propre, et des sommes de Riemann.
(c) Énoncer le théorème fondamental de l'intégration.
(d) Énoncer la formule d'intégration par parties.
(e) Énoncer la formule d'intégration par changement de variable.
(f) Donner la définition d'élément simple d'une fraction rationnelle.
(g) Donner la définition d'intégrale impropre.

Exercice 1. Calculer les primitives (en spécifiant le domaine de définition) des fonctions suivantes.

(a) x^n, avec $n \in \mathbb{N}$, (b) $\dfrac{1}{x}$, (c) $\dfrac{1}{x^n}$, avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

(d) $\dfrac{1}{1+x^2}$, (e) $\dfrac{1}{1-x^2}$, (f) $\dfrac{1}{x^2-1}$,

(g) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, (h) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, (i) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,

(j) $\cos x$, (k) $\sin x$, (l) $\tan x$,

(m) $\cosh x$, (n) $\sinh x$, (o) $\tanh x$,

(p) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$, (q) $\dfrac{1}{\sin^2 x}$, (r) $\dfrac{1}{\cosh^2 x}$,

(s) $\dfrac{1}{\sinh^2 x}$, (t) e^x, (u) $\ln x$,

(v) x^a, avec $a \in \mathbb{R}$, (w) a^x, avec $a > 0$, (x) $|x|$.

Exercice 2. Soit F_n la primitive de $f_n(t) = (1+t^2)^{-n}$:

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt.$$

(a) Calculer F_0 et F_1.
(b) Calculer F_{n+1} en fonction de F_n.
(c) En utilisant les points précédents, déterminer F_2 et F_3.

Exercice 3. Exprimer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples.

(a) $\dfrac{x^3}{x-1}$, (b) $\dfrac{x^2-x+1}{(x-2)(x^2+1)}$, (c) $\dfrac{x^3+3}{x^3-x}$,

(d) $\dfrac{x^2+3x+1}{x^3-1}$, (e) $\dfrac{x^3}{(x-1)^2(x+1)}$, (f) $\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2(x-1)^2}$,

(g) $\dfrac{x^5-12x}{(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)}$, (h) $\dfrac{x^3-2x+1}{(x-1)^3(x+1)}$. (i) $\dfrac{3x^2-4}{x^3-4x+3}$.

Exercice 4. Calculer une primitive des fonctions rationnelles de l'exercice précédent.

Exercice 5. Calculer les primitives suivantes :

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$, (b) $\displaystyle\int xe^x dx$, (c) $\displaystyle\int \sin^2(x)dx$,

(d) $\displaystyle\int \cos^2(x)dx$, (e) $\displaystyle\int \sin(2x)\sin(3x)dx$, (f) $\displaystyle\int \cos(2x)\cos(3x)dx$,

(g) $\displaystyle\int x\cos(x)dx$, (h) $\displaystyle\int x^2\sin(x)dx$, (i) $\displaystyle\int x\ln x dx$,

(j) $\displaystyle\int x\arctan(x)dx$, (k) $\displaystyle\int \arcsin(x)dx$.

Exercice 6. Calculer les primitives suivantes :

(a) $\displaystyle\int \frac{\arctan^2(x)}{1+x^2}dx$, (b) $\displaystyle\int \sin(\sin(x))\cos(x)dx$, (c) $\displaystyle\int \cos(x)\sin(x)dx$,

(d) $\displaystyle\int \cos^2(x)\sin^2(x)dx$, (e) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}dx$, (f) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}dx$,

(g) $\displaystyle\int \sqrt{2x-x^2}dx$, (h) $\displaystyle\int \frac{\ln(\tan(x))}{\cos^2(x)}dx$, (i) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{3x}-e^x}dx$,

(j) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}dx$, (k) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^{2x}}dx$.

Exercice 7. Calculer les intégrales suivants :

(a) $\displaystyle\int_1^3 \left(5x^2+3x-5+\frac{1}{x^3}\right)dx$, (b) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2(x)dx$, (c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos^3(x)dx$,

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^2(x)dx$, (e) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\arcsin^3(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$, (f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln^5(x)}{x}dx$.

(g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$, (h) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$, (i) $\displaystyle\int_{-1}^1 (1-|x|)dx$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \leq 0, \\ \arctan(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calculer

$$\int_{-\pi/2}^1 f(x)dx.$$

Exercice 9. Soient $a, b > 0$, et soit $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application donnée par

$$f_{a,b}(x) = b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

(a) Déterminer le domaine de $f_{a,b}$.

(b) Décrire géométriquement la courbe $y = f_{a,b}(x)$.

(c) Sans calculer une primitive de $f_{a,b}$, calculer

$$\int_{-a}^a f_{a,b}(x)dx.$$

(d) Calculer une primitive de $f_{a,b}$, et vérifier la valeur de l'intégrale obtenu au point (c).

Exercice 10. Calculer les intégrales suivants :

(a) $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{1-4x^2}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \sqrt{8-2x^2}\,dx$, (c) $\displaystyle\int_1^{2} \sqrt{2x-x^2}\,dx$,

(d) $\displaystyle\int_1^{2} \sqrt{-x^2+3x+2}\,dx$, (e) $\displaystyle\int_1^{\frac{e+1/e}{2}} \sqrt{x^2-1}\,dx$, (f) $\displaystyle\int_{-\frac{e-1/e}{2}}^{\frac{e-1/e}{2}} \sqrt{1+x^2}\,dx$.

Exercice 11. Soit $P(x) = ax^2+bx+c$ un polynôme de degré ≤ 2, avec $a,b,c \in \mathbb{R}$. Soit $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant de P. Décrire comment calculer une primitive de $\sqrt{P}$ dans les cas suivants.

(a) Si $a = 0$.

(b) Si $a > 0$ et $\Delta = 0$.

(c) Si $a < 0$ et $\Delta > 0$.

(d) Si $a > 0$ et $\Delta > 0$.

(e) Si $a > 0$ et $\Delta < 0$.

Exercice 12. Soient $m,n \in \mathbb{N}$, et $f(x) = \cos^m(x)\sin^n(x)$.

(a) Calculer une primitive de f quand n est impair.

(b) Calculer une primitive de f quand m est impair.

(c) Décrire une procedure pour se ramener aux cas précédents quand m et n sont pairs.

Exercice 13. Calculer les primitives suivantes.

(a) $\displaystyle\int \cos^2(x)\sin^3(x)\,dx$, (b) $\displaystyle\int \cos^5(x)\sin^2(x)\,dx$, (c) $\displaystyle\int \cos^3(x)\sin^5(x)\,dx$,

(d) $\displaystyle\int \cos^2(x)\sin^2(x)\,dx$, (e) $\displaystyle\int \cos^4(x)\,dx$, (f) $\displaystyle\int \sin^4(x)\,dx$,

(g) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$, (h) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$, (i) $\displaystyle\int \frac{\sin^2(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$,

(j) $\displaystyle\int \cosh^2(x)\sinh(x)\,dx$, (k) $\displaystyle\int \frac{\sinh^3(x)}{\cosh^2(x)}\,dx$, (l) $\displaystyle\int \frac{\cosh(x)+\sinh(x)+1}{\cosh^2(x)+\sinh^2(x)}\,dx$.

Exercice 14. Calculer les primitives suivantes.

(a) $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$, (b) $\displaystyle\int \frac{e^x+1}{e^{2x}-1}\,dx$, (c) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+4}{e^{3x}-1}\,dx$,

(d) $\displaystyle\int \frac{e^{4x}+3}{e^{2x}-1}\,dx$, (e) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+2e^x+2}{e^x+1}\,dx$, (f) $\displaystyle\int \frac{e^{-2x}+3}{e^{-x}+1}\,dx$.

(g) $\displaystyle\int \frac{\tan^2(x)-1}{\tan^3(x)}\,dx$, (h) $\displaystyle\int \frac{\tan^2(x)-1}{\tan(x)}\,dx$, (i) $\displaystyle\int \frac{\tan(x)+1}{\tan(x)-1}\,dx$,

(j) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-x}\,dx$, (k) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}{x+1}\,dx$, (l) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x-1}\,dx$.

Exercice 15. Pour tout $m,n \in \mathbb{N}^*$, calculer les intégrales suivants.

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(mx)\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(mx)\,dx$, (c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx$,

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx$, (e) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx$.

Soit maintenant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = c + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big),$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$, $c, a_k, b_k \in \mathbb{R}$ pour tout $k = 1, \ldots, n$.
Remarquer que f est périodique, et donner une periode. Ensuite, calculer pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

(f) $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$, (g) $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(mx)dx$, (h) $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(mx)dx$.

Exercice 16. Déterminer la limite quand x tend vers 0 de $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}\,dt$.
Indication : encadrer $\cos(t)$ *à l'aide du théorème de Taylor-Lagrange.*

Exercice 17. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer les intégrales impropres :

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$, (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$, (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^\alpha}\,dt$.

Exercice 18. Calculer les intégrales impropres suivants.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$, (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$, (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^2 e^t\,dt$,

(d) $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,dt$, (e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan(t)\,dt$, (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$,

(g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\,dt$, (h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$, (i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1-t^2}\,dt$,

(j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1+t}}\,dt$. (k) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1+t}}\,dt$.

Exercice 19. Étudier la limite des séries de Riemann suivantes.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$, (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$, (c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$,

(d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{n+k^2}$, (e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$, (f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(2n-k)}}$.